ЕКОНОМІКА ПІДПРИЄМСТВА

УДК 65.011

В.А. ЯНКОВОЙ, кандидат экономических наук, доцент
Одесского национального экономического университета

КОЛЛИНЕАРНОСТЬ ФАКТОРОВ ПРИ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА

Исследуются особенности оценки параметров указанной функции в условиях линейной корреляционной зависимости между производственными ресурсами, в частности влияние коллинеарности на точность и устойчивость коэффициентов модели. Приводятся математические и статистические меры коллинеарности факторов производственной функции Кобба-Дугласа. Предлагается переход от традиционной двухфакторной модели функции Кобба-Дугласа с линейно зависимыми производственными ресурсами к одно- и двухфакторной модели производительности труда (фондоотдачи) с нулевой или сниженной коллинеарностью. На примере данных ПАТ «Одескабель» иллюстрируются преимущества такого перехода и анализируются последствия взаимозависимости факторов производственной функции Кобба-Дугласа в условиях малой выборки.

Ключевые слова: производственная функция, коллинеарность факторов, оценка коэффициентов функции Кобба-Дугласа.

Постановка проблемы. Важным условием успешного использования производственных функций (ПФ) является точность оценки неизвестных параметров моделей, адекватных наблюдаемой информации о пространственной или временной вариации показателей предприятий. Опыт экономических исследований показывает, что наиболее популярной является неоклассическая двухфакторная ПФ Кобба-Дугласа [1–4]:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad (1)$$

где Q – выпуск продукции в стоимостном выражении;

K – капитал, направленный в производственные фонды;

L – денежные затраты на оплату труда;

A – неизвестный коэффициент шкалы ($0 < A$);

α, β – неизвестные параметры ПФ ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$).

При оценке неизвестных коэффициентов A, α, β по методу наименьших квадратов применяют логарифмирование ПФ (1), в результате которого получается следующее выражение:

$$lnQ = lnA + a\ lnK + b\ lnL. \qquad (2)$$

Обозначения
$lnQ = Y$, $\ln A = A'$, $lnK = x_1$, $lnL = x_2$
приводят формулу (2) к линейному виду:

$$Y = A' + a\,x_1 + b\,x_2. \qquad (3)$$

Параметры модели (3) достаточно легко рассчитываются с помощью персонального компьютера на основе программ корреляционно- регрессионного анализа путем стандартизации (центрирования и нормирования) преобразованных данных, например, в редакторе *Excel*.

Уравнение (3) в стандартизованном виде записывается следующим образом:

$$z_Y = b_1 z_1 + b_2 z_2, \qquad (4)$$

где $b_0 = 0$; $z_{iY} = (Y_i - \grave{}Y)/\sigma_Y$; $z_{ij} = (x_{ij} - \grave{}x_j)/\sigma_j$;

$\bar{Y}, \bar{x}_j$ – средние значения переменных;

σ_Y, σ_j – стандартные отклонения переменных;

b_1, b_2 – стандартизованные коэффициенты уравнения регрессии (3).

Решение системы нормальных уравнений для модели (4) в матричной записи выглядит так:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r_{Y1} \\ r_{Y2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где r_{Y1}, r_{Y1} – коэффициенты парной корреляции между зависимой переменной Y и факторами x_1, x_2;

r_{12}, r_{21} – коэффициенты парной корреляции между самими факторами x_1, x_2 ($r_{12} = r_{21}$);

$^{-1}$ – оператор обращения корреляционной матрицы.

Однако при этом следует иметь в виду тот факт, что между переменными x_1 и x_2 может наблюдаться тесная линейная корреляционная зависимость. Поэтому вполне правомерно ожидать, что коэффициент парной корреляции r_{12} существенно отличается от нуля. Возникает вопрос: как влияет наличие коллинеарности факторов на результаты оценки неизвестных коэффициентов b_1, b_2 и, в конечном счете, на результаты оценки параметров A, α, β ПФ (1)? Ответ однозначный – коллинеарность негативно сказывается на точности оценки параметров любой регрессионной модели, в том числе и ПФ Кобба-Дугласа.

В самом деле, если определитель матрицы r_X близок к нулю, то рассчитать обратную матрицу r_X^{-1} в уравнении (5) довольно трудно. В данном случае оценки b_1, b_2 становятся неустойчивыми: малые изменения исходных статистических данных вызывают очень большие (часто выходящие за пределы качественной экономической интерпретации) изменения величины коэффициентов уравнений регрессии (4), (1).

Анализ последних исследований и публикаций. Первым шагом на пути уменьшения негативных последствий коллинеарности факторов для результатов множественного корреляционно-регрессионного анализа является выяснение причин тесной корреляционной зависимости между переменными x_1 и x_2. В условиях применения ПФ Кобба-Дугласа коллинеарность переменных $x_1 = lnK$, $x_2 = lnL$ возникает в силу того, что они обе косвенно характеризуют общее свойство моделируемых предприятий – их размер.

Вторым шагом на пути решения обсуждаемой проблемы является измерение коллинеарности, т.е. определение показателя, достаточно точно характеризующего уровень данного статистического явления. В настоящее время в литературе можно встретить две группы показателей, применяемых в качестве мер коллинеарности [5, с. 449; 6, с. 282–285; 7]:

1) меры вырожденности матрицы r_X;

2) меры линейной корреляционной зависимости между факторами.

Показатели первой группы характеризуют коллинеарность с точки зрения вычислительной математики, отражают трудности обращения матрицы r_X вследствие того, что $\det r_X \approx 0$. Известно, что необходимым и достаточным условием вырожденности матрицы r_X является равенство нулю хотя бы одного из её характеристических корней. Приведенное следствие используется для построения меры коллинеарности, которая называется собственным значением матрицы r_X и рассчитывается по формуле:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}, \quad (6)$$

где $|\lambda_{max}|$, $|\lambda_{min}|$ – наибольший и наименьший по абсолютной величине

характеристический корень матрицы r_X.

Для ПФ Кобба-Дугласа размерность матрицы r_X 2×2, поэтому и число характеристических корней равно двум. Они определяются следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = [\mathrm{tr} r_X \pm (\mathrm{tr}^2 r_X - 4\det r_X)^{1/2}]/2, \quad (7)$$

где $\mathbf{tr}\boldsymbol{r}_X$ – след матрицы $\boldsymbol{r}_X$, который равен числу факторов, т.е. 2.

Поскольку $\mathbf{det}\boldsymbol{r}_X = \mathbf{1} - \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{21} = \mathbf{1} - \boldsymbol{r}^2_{12}$, то выражение (7) приобретает окончательный вид:

$$\lambda_{1,2} = [2 \pm (4 - 4 + 4\, r^2_{12})^{1/2}]/2 = 1 \pm r_{12}. \qquad (8)$$

Очевидно, что в случае линейной независимости (ортогональности) факторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, т.е. при $\boldsymbol{r}_{12} \approx \mathbf{0}$ имеет место случай двух одинаковых характеристических корней: $\mathbf{l}_1 \approx \mathbf{l}_2 \approx \mathbf{1}$ и собственное значение матрицы $\boldsymbol{r}_X$ согласно (6) $\boldsymbol{\gamma} \approx \mathbf{1}$, а $\mathbf{det}\boldsymbol{r}_X \approx \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ (корреляционная матрица невырожденная).

В ситуации наличия коллинеарной зависимости между факторами $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, т.е. при $\boldsymbol{r}_{12} \approx \pm\mathbf{1}$ $\mathbf{det}\boldsymbol{r}_X \approx \mathbf{0}$ (матрица $\boldsymbol{r}_X$ – вырожденная, сингулярная) $\boldsymbol{\lambda}_1 \approx \mathbf{2}$, $\boldsymbol{\lambda}_2 \approx \mathbf{0}$, т.е. один из характеристических корней близок к нулю. При этом собственное значение корреляционной матрицы согласно (6) $\boldsymbol{\gamma} \to \infty$.

Показатели второй группы характеризуют коллинеарность с точки зрения математической статистики, в которой непосредственными показателями степени линейной зависимости переменных обычно служат коэффициенты корреляции и детерминации. Здесь наиболее известными являются следующие меры:

а) $\mathbf{max}\boldsymbol{R}_j$ – максимальный коэффициент множественной корреляции для уравнений регрессии типа:

$$\mathbf{z}_j = \boldsymbol{b}_1 \mathbf{z}_1 + \boldsymbol{b}_2 \mathbf{z}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_m \mathbf{z}_m, \qquad (9)$$

описывающих зависимость j-ого фактора от всех остальных;

б) $\mathbf{max}\boldsymbol{c}_{jj}$ – максимальный диагональный элемент матрицы, обратной к матрице $\boldsymbol{r}_X$.

Мера а), как известно, изменяется в интервале от $\mathbf{0}$ до $\mathbf{1}$ и трактуется естественным образом: чем больше максимальное значение $\boldsymbol{R}_j$, тем выше степень коллинеарности факторов, и наоборот.

Величины, определяющие меры б) и а), связаны между собой следующим образом:

$$C_{jj} = \frac{1}{1 - R_j^2}. \qquad (10)$$

Поскольку для ПФ Кобба-Дугласа выполняется условие $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_{21}$, то $\boldsymbol{c}_{11} = \boldsymbol{c}_{22}$ и меры коллинеарности а) и б) выглядят так: $\mathbf{max}\boldsymbol{R}_j = |\boldsymbol{r}_{12}|$, $\mathbf{max}\boldsymbol{c}_{jj} = \mathbf{1}/(\mathbf{1} - \boldsymbol{r}^2_{12})$. Ясно, что в случае линейной независимости (ортогональности) факторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, т.е. при $\boldsymbol{r}_{12} \approx \mathbf{0}$ мера а) близка к нулю, а мера б) – к единице. При этом $\mathbf{det}\boldsymbol{r}_X \approx \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ (корреляционная матрица невырожденная).

В противоположной ситуации (при наличии линейной корреляционной зависимости между факторами $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, т.е. при $\boldsymbol{r}_{12} \approx \pm\mathbf{1}$) мера а) близка к единице, а мера б) стремится в бесконечность. И, как следствие, $\mathbf{det}\boldsymbol{r}_X \approx \mathbf{0}$, т.е. матрица $\boldsymbol{r}_X$ – вырожденная, сингулярная.

Нерешенные ранее части общей проблемы. Определение степени коллинеарности факторов с помощью мер, рассмотренных выше, не позволяет решить вопрос об устранении негативных последствий корреляционной зависимости косвенно дублирующих друг друга факторных переменных $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{lnK}$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{lnL}$ при использовании на практике ПФ Кобба-Дугласа. Как показывает анализ литературных источников, посвященных проблемам построения и применения ПФ в экономике, указанная задача вообще не ставилась. Однако, на наш взгляд, она достаточно актуальна, особенно при ограниченной информационной базе исследования, когда число наблюдений невелико.

Целью статьи является разработка нового подхода, позволяющего исключить либо уменьшить негативные последствия коллинеарности факторов при оценке параметров $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ПФ (1).

Изложение основного материала исследования. В случае, когда эффективность производственного процесса практически не зависит от масштабов производства, т.е. когда ПФ Кобба-Дугласа является линейно однородной, выполняется условие $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{1}$. Тогда ПФ (1) принимает вид:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{\alpha}\boldsymbol{L}^{1-\alpha}. \qquad (11)$$

Разделим левую и правую части функции (11) на величину $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{L}$). В результате деления на $\boldsymbol{K}$ получаем:

$$Q/K = AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = A(K/L)^{\alpha-1}. \qquad (12)$$

Уравнение (12) выражает зависимость фондоотдачи $\boldsymbol{Q/K}$ от уровня фондовооруженности $\boldsymbol{K/L}$ в рамках ПФ Кобба-Дугласа. Прологарифмировав (12), получим:

$$\ln(Q/K) = \ln A + (\alpha - 1)\ln(K/L). \qquad (13)$$

Обозначим $\ln(Q/K) = (Q/K)'$; $\ln A = A'$; $\ln(K/L) = (K/L)'$. Тогда модель (13) запишется так:

$$(Q/K)' = A' + (\alpha - 1)(K/L)'. \qquad (14)$$

Аналогично при делении (11) на $\boldsymbol{L}$ и логарифмировании получается следующее выражение:

$$(Q/L)' = A' + \alpha(K/L)', \qquad (15)$$

где $(Q/L)' = \ln(Q/L)$.

Модели (14), (15) привлекательны тем, что двухфакторное уравнение (1) превращается в две однофакторные парные линейные модели с автоматическим устранением линейной корреляционной зависимости производственных ресурсов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$. Это всегда позитивно отражается на точности оценки неизвестных параметров $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$, поскольку факторы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$, а также их логарифмы коррелированны между собой вследствие того, что каждый из них отражает размер предприятия. В самом деле, рост объема выпускаемой продукции на предприятии $\boldsymbol{Q}$ обычно вызывает необходимость увеличения затрат капитала, направляемого в производственные фонды $\boldsymbol{K}$, с одной стороны, и повышения оплаты живого труда $\boldsymbol{L}$ – с другой. Справедливо и обратное утверждение.

В реальной экономической действительности обычно эффективность производства существенно зависит от его масштабов, т.е. ПФ Кобба-Дугласа, вообще говоря, не является линейно однородной, и условие $\boldsymbol{\alpha + \beta \approx 1}$ не выполняется. Разделим левую и правую части функции (1) на величину $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{L}$). В результате деления на $\boldsymbol{K}$ и элементарных преобразований получим:

$$Q/K = AK^{\alpha-1}L^{\beta} = AK^{\alpha+\beta-1}L^{\beta}/K^{\beta} = AK^{\alpha+\beta-1}(L/K)^{\beta}. \qquad (16)$$

Логарифмирование выражения (16) приводит его к виду:

$$\ln(Q/K) = \ln A + (\alpha + \beta - 1)\ln K + \beta\ln(L/K) \qquad (17)$$

или в принятых выше обозначениях:

$$(Q/K)' = A' + (\alpha + \beta - 1)K' + \beta(L/K)'. \qquad (18)$$

Аналогично, разделив ПФ Кобба-Дугласа (1) на $\boldsymbol{L}$, прологарифмировав и переобозначив, получим:

$$(Q/L)' = A' + (\alpha + \beta - 1)L' + \alpha(K/L)' \qquad (19)$$

Проведенный выше анализ позволяет систематизировать полученные результаты и указать, по крайней мере, пять различных вариантов решения задачи оценки параметров ПФ Кобба-Дугласа в экономическом исследовании (табл. 1).

Таблица 1

Варианты решения задачи оценки параметров ПФ Кобба-Дугласа

Варианты	Зависимая переменная	Преимущества	Недостатки	Рекомендации
1	2	3	4	5
1. Традиционный, основанный на формулах (1)–(5)	Выпуск продукции	Применим для любой модели	Наличие коллинеарности	Не применять на малых выборках
2. Базирующийся на гипотезе $\boldsymbol{\alpha + \beta \approx 1}$ и формулах (11)–(14)	Фондоотдача	Отсутствие коллинеарности	Применим лишь для линейно-однородной ПФ. Нет информации о предпочтении по сравнению с вариантом 3	Применять, если есть основания для выполнения гипотезы $\boldsymbol{\alpha + \beta \approx 1}$ и точность модели выше по сравнению с вариантом 3

Окончание табл. 1

Варианты	Зависимая переменная	Преимущества	Недостатки	Рекомендации
1	2	3	4	5
3. Базирующийся на гипотезе $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{1}$ и формулах (11), (15)	Производительность труда	Отсутствие коллинеарности	Применим лишь для линейно-однородной ПФ. Нет информации о предпочтении по сравнению с вариантом 2	Применять, если есть основания для выполнения гипотезы $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{1}$ и точность модели выше по сравнению с вариантом 2
4. Преобразованный, основанный на формулах (1), (16)–(18)	Фондоотдача	Применим для любой ПФ (1). Уменьшение коллинеарности	Нет информации о предпочтении по сравнению с вариантом 5	Применять, если точность модели выше по сравнению с вариантом 5
5. Преобразованный, основанный на формулах (1), (19)	Производительность труда	Применим для любой ПФ (1). Уменьшение коллинеарности	Нет информации о предпочтении по сравнению с вариантом 4	Применять, если точность модели выше по сравнению с вариантом 4

Первый (традиционный) и наиболее популярный подход к определению неизвестных коэффициентов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ПФ (1) наряду с преимуществами универсальности имеет один существенный недостаток, вызванный коллинеарностью факторов $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, а также их логарифмов. Он приводит к потере точности и устойчивости найденных параметров ПФ Кобба-Дугласа вследствие того, что мера коллинеарности б), определяемая формулой (10), входит в знаменатель расчетного значения $\boldsymbol{t}$-критерия Стьюдента, которое используется для проверки надежности отдельных коэффициентов регрессии.

Так, для коэффициентов $\boldsymbol{b}_j$ модели (4) $\boldsymbol{t}_{расч} = \boldsymbol{b}_j/\boldsymbol{s}_j$, где $\boldsymbol{s}_j$ – стандартная ошибка данного параметра, которая определяется следующим образом:

$$s_j = \sqrt{C_{jj}\sigma^2_{oct}}, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^2_{ост}$ – остаточная дисперсия уравнения регрессии (4).

Очевидно, что при высокой коллинеарности производственных ресурсов $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ и их логарифмов $\boldsymbol{c}_{jj} \to \infty$, что приводит к завышению стандартной ошибки $\boldsymbol{s}_j$ и к занижению $\boldsymbol{t}_{расч}$ соответствующего коэффициента регрессии. В результате может произойти необоснованное исключение данного фактора из уравнения и получение неадекватной модели, например, неполной ПФ Кобба-Дугласа типа $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{AK}^{\alpha}$ или $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{AL}^{\beta}$. Эта угроза особенно актуальна на малой выборке, когда число наблюдений невелико и остаточная дисперсия $\boldsymbol{\sigma}^2_{ост}$ высока.

Что касается второго и третьего вариантов нахождения параметров ПФ (1), то они являются идеальными в смысле полного отсутствия коллинеарности факторов. Однако их применение ограничено недостатками, отмеченными в графе 4 табл. 1, поэтому рекомендуется использовать оба указанных варианта с последующим выбором наиболее точной модели.

Предложенные нами четвертый и пятый варианты расчета призваны уменьшить недостатки первого (традиционного) подхода к оцениванию неизвестных коэффициентов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ПФ (1). Их суть сводится к замене зависимой переменной и обоих факторов в ПФ Кобба-Дугласа согласно формулам (18), (19). При этом коллинеарность между $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{lnK}$ и $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{lnL}$ в уравнении (3) искусственно «заменяется» линейными корреляционными зависимостями между $x_1 = lnK$, $x_2 = ln(L/K)$ в модели (18) и $x_1 = lnL$, $x_2 = ln(K/L)$ в модели (19). Опыт практических исследований показывает, что такой переход несколько уменьшает коллинеарность факторов ПФ Кобба-Дугласа.

Рассмотрим в качестве примера построение ПФ Кобба-Дугласа по данным ПАТ «Одескабель» за 2005–2014 гг. (табл. 2). Будем использовать все пять вариантов оценки параметров ПФ (1) из табл. 1.

Перед непосредственной оценкой неизвестных параметров модели был проведен корреляционный анализ, который показал, что на исследуемом предприятии между факторами «капитал» и «труд» существует прямая, тесная и статистически значимая связь: r_{KL} = **0,9023**. Интересно, что между логарифмами этих показателей зависимость еще более тесная: r_{12} = **0,9176**.

Затем была измерена коллинеарность факторов x_1, x_2 путем определения характеристических корней симметричной матрицы r_X из уравнения (5):

$$l_{1,2} = 1 \pm r_{12} = 1 \pm 0{,}9176 \; (l_1 = 1{,}9176;\ l_2 = 0{,}0824).$$

Отсюда собственное значение матрицы r_X равно: $g = (1{,}9176/0{,}0824)^{1/2} = 4{,}8241$. Поскольку величина g довольно сильно превышает свою нижнюю границу, равную **1**, то коллинеарность факторов x_1, x_2 является существенной, значимой.

Кроме того, была также измерена коллинеарность x_1, x_2 с помощью мер линейной корреляционной зависимости между факторами. Меры а) и б) для данной задачи выглядят так: $\max R_j = r_{12} = 0{,}9176$; $\max c_{jj} = 1/(1 - r^2_{12}) = 1/(1 - 0{,}84199) = 6{,}3287$. Их достаточно высокие значения, существенно превышающие соответствующие нижние границы **0** и **1**, подтверждают вывод относительно коллинеарности факторов x_1, x_2, сделанный выше. Поэтому ясно, что в данной ситуации негативного влияния коллинеарности факторов в модели (1) на точность оценки ее параметров избежать не удастся.

Результаты расчетов коэффициентов A, α, β ПФ Кобба-Дугласа, проведенных в ходе шагового регрессионного анализа с отсевом незначимых переменных по t-критерию Стьюдента, представлены в табл. 3.

Таблица 2

Исходные данные ПАТ «Одескабель» за 2005–2014 гг. для построения ПФ Кобба-Дугласа

Год	Q, тыс. грн	K, тыс. грн	L, тыс. грн
2005	630261	587620	52953
2006	582727	513536	55893
2007	562223	438104,5	47052
2008	618035	399011	44771
2009	498443	388359,5	34143
2010	424748	393357,5	29458
2011	584615	400728,4	34983
2012	668361	373946,6	29818,7
2013	448282,6	324808,4	22665,2
2014	390225,7	275436,1	20988,1

Таблица 3

Сравнение результатов оценки параметров ПФ Кобба-Дугласа ПАТ «Одескабель»

Вариант	Модель	Коэффициент детерминации R^2	F-критерий Фишера	Меры коллинеарности
1	2	3	4	5
1. Традиционный, основанный на формулах (1)–(5)	$Q = 9369{,}359L^{0{,}3858}$	0,5112	**8,366**	**γ = 4,824 а) 0,9176 б) 6,3287**
2. Базирующийся на гипотезе $\alpha + \beta \approx 1$ и формулах (11)–(14)	Статистически незначима	**0,0084**	**0,068**	–
3. Базирующийся на гипотезе $\alpha + \beta \approx 1$ и формулах (11), (15)	$Q = 1{,}069K^{1{,}0895}L^{-0{,}0895}$	**0,5576**	**10,083**	–
4. Преобразованный, основанный на формулах (1), (16)–(18)	$Q = 315{,}608K^{1{,}4240}$	0,3020	3,466	**γ = 1,9797 а) 0,5934 б) 1,5436**
5. Преобразованный, основанный на формулах (1), (19)	$Q = 9368{,}975L^{0{,}3858}$	**0,7261**	21,213	**γ = 3,7103 а) 0,8645 б) 3,9597**

Анализ данных табл. 3 показал, что наибольшего внимания заслуживают три модели, построенные по преобразованному варианту 5, по традиционному методу 1 и по варианту 3, базирующемуся на гипотезе $\alpha + \beta \approx 1$ и формулах (11), (15). При этом варианты 1 и 5 дают практически тождественные ПФ Кобба-Дугласа с той лишь разницей, что модель, основанная на формулах (1), (19), более точна и надежна вследствие сравнительно низкой коллинеарности преобразованных переменных **ln(*L*)** и **ln(*K/L*)** (см. графы 3–5 табл. 3). Обе модели сигнализируют о статистически незначимом влиянии на выпуск продукции производственного ресурса «капитал» K и существенной роли фактора «труд» L. С ростом затрат на оплату работников ПАТ «Одескабель» в изучаемом периоде времени на 1% выпуск продукции увеличивался в среднем ежегодно почти на 0,39%.

Иные результаты оценки неизвестных параметров, которые полностью противоречат традиционной и преобразованной моделям, получены в результате использования варианта 3, который базируется на гипотезе $\alpha + \beta \approx 1$ и формулах (11), (15). Построенная ПФ $Q = 1{,}069K^{1{,}0895}L^{-0{,}0895}$ несколько уступает по точности и надежности преобразованной модели, полученной по варианту 5. Но зато коллинеарность факторов в ней отсутствует полностью. При этом решающее значение для выпуска продукции отводится затратам капитала, направляемым в производственные фонды, в то время как фактор «труд» находится в относительном избытке.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. На наш взгляд, существует, по меньшей мере, две основные причины данного противоречия:

1. Коллинеарность преобразованных факторных переменных в модели (19) и ее негативное влияние на точность оценки неизвестных параметров ПФ Кобба-Дугласа (см. строку и графу 5 табл. 3).

2. Короткая длина изучаемых рядов динамики исходных данных ПАТ «Одескабель» – всего 10 точек.

Мы считаем, что, исходя из приведенной теории изучаемой проблемы, есть все основания отдать предпочтение выводам, полученным именно по модели (15), построенной при полном устранении коллинеарности факторов $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$). Тем более, что по свидетельству руководства кадровой службы предприятия в изучаемый период времени ПАТ «Одескабель» не испытывало дефицита рабочей силы, и прием новых работников осуществлялся на довольно жесткой конкурсной основе.

В отношении длины изучаемых рядов динамики исходных данных, вполне очевидно, что с ростом числа наблюдений противоречия в выводах, полученных на базе уравнений (19) и (15), будут постепенно сглаживаться. Поэтому предложенный подход к построению ПФ Кобба-Дугласа особенно актуален на малых выборках, когда длина изучаемых рядов динамики невелика.

Список использованных источников

1. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

2. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навч. посіб. / В.В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.

3. Производственные функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm

4. Казакова М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf

5. Лук'яненко І.Г. Економетрика / І.Г. Лук'яненко, Л.І. Краснікова. – К.: Знання, КОО, 1998. – 494 с.

6. Янковой А.Г. Многомерный анализ в системе STATISTICA / А.Г. Янковой. – Одесса: Оптимум, 2002. – Вып. 2. – 325 с.

7. Янковой А.Г. К вопросу измерения и проверки мультикол-линеарности / А.Г. Янковой // Вероятностно-статистические методы в экономико-математическом моделировании. – М.: ЦЭМИ, 1988. – С. 49–58.

References

1. Kleyner G.B. (1986). *Proizvodstvennyie funktsii: teoriya, metodyi, primenenie* [Production functions: theory, methods, using]. Moscow, Finansyi i statistika Publ., 239 p. (In Russian).

2. Vitlinskiy V.V. (2003). *Modelyuvannya ekonomIki* [Modeling of the economy]. Kyiv, KNEU, 408 p. (In Ukrainian).

3. *Proizvodstvennyie funktsii* [Production functions]. Available at: http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm (In Russian).

4. Kazakova M.V. (2011). *Analiz svoystv proizvodstvennyih funktsiy, ispolzuemyih pri dekompozitsii ekonomicheskogo rosta* [Analysis of the properties of production functions used in the decomposition of economic growth]. Available at: ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf. (In Russian).

5. Luk'yanenko I.G., Krasnikova L.I. (1998). *Ekonometrika* [Econometrics]. Kyiv, Znannya Publ., 494 p. (In Ukrainian).

6. Iankovoi A.G. (2002). *Mnogomernyiy analiz v sisteme STATISTICA. Kn. 2* [Multivariate analysis in the system STATISTICA, vol. 2]. Odessa, Optimum Publ., 325 p. (In Russian).

7. Iankovoi A.G. (1988). *K voprosu izmereniya i proverki multikol-linearnosti* [To the question of measurement and verification of multicollinearity]. *Veroyatnostno-statisticheskie metodyi v ekonomiko-matematicheskom modelirovanii* [Probabilistic and statistical methods in the economic-mathematical modeling]. Moscow, CEMI, pp. 49-58. (In Russian).

Досліджуються особливості оцінки параметрів зазначеної функції в умовах лінійної кореляційної залежності між виробничими ресурсами, зокрема вплив колінеарності на точність і стійкість коефіцієнтів моделі. Наводяться математичні та статистичні міри колінеарності факторів виробничої функції Кобба-Дугласа. Пропонується перехід від традиційної двофакторної моделі функції Кобба-Дугласа з лінійно залежними виробничими ресурсами до одно- и двофакторної моделі продуктивності праці (фондовіддачі) з нульовою або зниженою колінеарністю. На прикладі даних ПАТ «Одескабель» ілюструються переваги такого переходу та аналізуються наслідки взаємозалежності факторів виробничої функції Кобба-Дугласа в умовах малої вибірки.

Ключові слова: виробнича функція, коллінеарність факторів, оцінка коефіцієнтів функції Кобба-Дугласа.

The features of estimating the parameters of a given function in a linear correlation between the productive resources, in particular, the effect of collinearity on the accuracy and stability of the model coefficients are researched. The mathematical and statistical measures of collinearity of factors of Cobb-Douglas function are presented. It is proposed to change from the traditional model with two factors of Cobb-Douglas function with linearly dependent production resources to the one- and two-factor model of labor productivity with zero or reduced collinear. On example of PJSC «Odeskabel» data the benefits of such a transition are illustrated and the effects of the interdependence of the production function Cobb-Douglas factors in a small sample are analyzed.

Key words: production function, collinearity of factors, score coefficients of Cobb-Douglas function.

Одержано 03.02.2016.