УДК 330.161
DOI: 10.32342/2074-5354-2019-2-51-6

Г.А. МАЖАРА,
аспірант Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

В.О. КАПУСТЯН,
доктор фізико-математичних наук, професор
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ІРРАЦІОНАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В УМОВАХ ЧАСТКОВОЇ ІНФОРМОВАНОСТІ ГРАВЦІВ НА ПРИКЛАДІ ІНДИВІДУАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНИХ РІВНОВАГ

Найбільш привабливими концепціями оптимальності в умовах повної інформованості гравців є принципи оптимальності за Парето і Нешем. Концепція оптимальності за Парето базована на ідеї кооперативної поведінки гравців, коли вони колективно обирають свої стратегії і спільно враховують функції виграшу. Тому не існує ситуацій, які будуть для всіх гравців одночасно кращими, ніж будь-яка Парето-оптимальна. Розв'язання задач теорії ігор лише класичними методами є неповним, адже поряд з класичними методами некооперативної теорії гри, такими як рівновага за Нешем і Парето, існують також інші методи. Деякі з них відносять до ірраціональних, наприклад, принципи індивідуальної оптимальності. Принцип індивідуальної оптимальності надає можливість кожному гравцеві обирати свої стратегії індивідуально (некооперативно), але враховувати при цьому інтереси всіх інших гравців (компроміс заради вирішення конфлікту). Цей принцип обґрунтований у так званих одноцільових іграх, де у всіх гравців одна мета, але вона характеризується для кожного гравця своєю функцією виграшу. В ідеалі ця мета полягає у виборі гравцями своїх стратегій так, щоб склалася найкраща ситуація для всіх гравців. Оскільки такі ситуації можуть не існувати, то гравці можуть погодитися на компроміс заради спільної мети. Наприклад, при будуванні споруди існує організація-підрядник і організація субпідряду. Підрядник має на меті, витративши певну суму грошей, отримати найкращий результат, а субпідрядник – виконати завдання так, щоб підряднику було достатньо мінімальної суми витрачених коштів. Хоча в них обох єдина мета – будування споруди, функція виграшу для кожного своя, яка характеризується компромісом між ними. З точки зору раціональності компроміс не є прямою максимізацією потреб, отже, необхідно перевірити, чи може така ірраціональна поведінка мати свої переваги.

У роботі розглянуто методи некооперативної теорії гри на прикладі неокласичної моделі рівноваги товарів на обмеженому ринку між фіксованою кількістю економічних агентів, описано методи «нащупування Курно» та принцип індивідуальної оптимальності, продемонстровано різницю між концепціями: розв'язано задачу за допомогою принципу індивідуальної оптимальності та порівняно результати з розв'язанням цієї ж задачі у двох інших випадках.

Ключові слова: поведінкова економіка, класичні теорії, ігрові задачі, оптимальність за Парето, індивідуально-оптимальна рівновага, рівновага за Нешем.

Наиболее привлекательными концепциями оптимальности в условиях полной информированности игроков являются принципы оптимальности по Парето и Нэшу. Концепция оптимальности по Парето основана на идее кооперативного поведения игроков, когда они коллективно выбирают свои стратегии и совместно учитывают функции выигрыша. Поэтому не существует ситуаций, которые будут для всех игроков одновременно лучше, чем любая Парето-оптимальная. Решение задач теории игр только классическими методами является неполным, ведь наряду с классическими методами некооперативных теорий игр, такими как равновесие по Нэшу и Парето, существуют и другие методы. Некоторые из них относят к иррациональным, например, принципы индивидуальной оптимальности. Принцип индивидуальной оптимальности, предоставляет возможность каждому игроку выбирать свои стратегии индивидуально (некооперативно), но учитывать при этом интересы всех других игроков (компромисс ради разрешения конфликта). Этот принцип обоснован в так называемых равноцелевых играх, где у всех игроков одна цель, но она характеризуется для каждого игрока своей функцией выигрыша. В идеале эта цель заключается в выборе игроками своих стратегий так, чтобы сложилась наиболее предпочтительная ситуация для всех игроков. Поскольку такие ситуации могут не существовать, то игроки могут согласиться на компромисс ради общей цели.

В работе рассмотрены методы некооперативных теорий игр на примере неоклассической модели равновесия товаров на ограниченном рынке между фиксированным количеством экономических агентов, описаны методы «нащупывания Курно» и принцип индивидуальной оптимальности, продемонстрирована разница между концепциями: решена задача с помощью принципа индивидуальной оптимальности и проведено сравнение результатов с решением этой же задачи в двух других случаях.

Ключевые слова: поведенческая экономика, классические теории, игровые задачи, оптимальность по Парето, индивидуально-оптимальное равновесие, равновесие по Нэшу.

Вступ. Найбільш привабливими концепціями оптимальності в умовах повної інформованості гравців є принципи оптимальності за Парето і Нешем [1]. Концепція оптимальності за Парето базована на ідеї кооперативної поведінки гравців, коли вони колективно обирають свої стратегії і спільно враховують функції виграшу. Тому не існує ситуацій, які будуть для всіх гравців одночасно кращими, ніж будь-яка Парето-оптимальна. У разі коли гравці обирають основою для угоди між собою концепцію Парето-оптимальності, у деяких з них може виникнути спокуса при виборі конкретної Парето-оптимальної ситуації змінити свою стратегію на іншу, яка буде кращою для них. У цьому випадку така ситуація буде нестабільною, і їх домовленість може бути зруйнована.

Концепція рівноваги за Нешем ґрунтується на ідеї некооперативної поведінки гравців, коли вони індивідуально обирають свої стратегії і кожен враховує лише свою функцію виграшу. Ситуація гри називається «рівновагою Неша», якщо від неї невигідно відхилятися будь-якому одному гравцю (всі інші гравці свої стратегії не змінюють), оскільки значення його функції виграшу не покращиться (буде для нього оптимальним). Якщо гравці укладають угоду про свою майбутню поведінку і її основою є «рівновага Неша», то вона буде стабільною. «Ціною» привабливості «рівноваги Неша» є серйозні проблеми, які пов'язані з її існуванням, складністю знаходження, проблемою вибору єдиної рівноваги [1].

У певному сенсі ці принципи оптимальності є крайнощами в поведінці гравців між колективним та індивідуальним вибором стратегій з урахуванням функцій виграшу гравців. Проте вони обидві є раціональними з точки зору гравця, що максимізує свою корисність, незважаючи на цілі оточуючих. З іншого боку, така поведінка не є єдино можливою. Принцип індивідуальної оптимальності [2] надає можливість кожному гравцю обирати свої стратегії індивідуально (некооперативно), але враховувати при цьому інтереси всіх інших гравців (компроміс заради вирішення конфлікту). Цей принцип обґрунтований у так званих одноцільових іграх, де у всіх гравців одна мета, але вона характеризується для кожного гравця своєю функцією виграшу. Наприклад, при будівництві споруди існує організація-підрядник і організація субпідряду. Підрядник має на меті, витративши певну суму грошей, отримати найкращий результат, а субпідрядник – виконати завдання так, щоб підряднику було достатньо мінімальної суми витрачених коштів. Хоча у них обох єдина мета – будування споруди, функція виграшу для кожного своя, яка характеризується компромісом між ними. В ідеалі ця мета полягає у виборі гравцями своїх стратегій так, щоб склалася найкраща ситуація для усіх гравців. Оскільки такі ситуації можуть не існувати, то гравці можуть погодитися на компроміс заради спільної мети. З точки зору раціональності компроміс не є прямою максимізацією потреб, отже, необхідно перевірити, чи може така ірраціональна поведінка мати свої переваги.

Метою дослідження є вивчення ірраціональної поведінки економічних агентів на обмеженому ринку матеріальних благ, а також з'ясування впливу принципу індивідуальної оптимальності у класичних ігрових задачах.

Методологія. У процесі дослідження використано методи некооперативної теорії гри на прикладі неокласичної моделі рівноваги товарів на обмеженому ринку між фіксованою кількістю економічних агентів. Описано методи «нащупування Курно» та принцип індивідуальної оптимальності. Розв'язано задачу за допомогою принципу індивідуальної оптимальності.

Результати дослідження. Припустимо, що на ринку є N гравців і M товарів, де N і M – цілі додатні числа. У кожного гравця є свій бюджет $\gamma_i, i \in [1,N]$, ціна кожного товару $p_k, k \in [1,M]$, корисність кожного товару $\mu_k, k \in [1,M]$.

Бюджет кожного з гравців коливається і залежить від його бажання витратити суму не більше ніж $\gamma_{i\,max}$, і, в його розумінні, суму менше ніж $\gamma_{i\,min}$ він витратити не зможе для задоволення своїх потреб.

Кількість товару, що купується кожним гравцем, задається лінійно і залежить від бюджету кожного гравця:

$$x_k^i = a_k^i + b_k^i \times \gamma_i$$

Таким чином, для кожного гравця можна записати корисність його набору товарів U_i:

$$U_i = \sum_{k=1}^{M} x_k^i \,{}^\wedge \mu_k^i,$$

а його обмеження за бюджетом:

$$\sum_{k=1}^{M} x_k^i \times p_k \le \gamma_i,$$

при цьому обмеження товару:

$$\sum_{k=1}^{M} x_k^i \le L_k \sum_{k=1}^{M} x_k^i \le L_k.$$

Споживач максимізує корисність шляхом вибору такого споживчого набору, який задовольняє бюджетне обмеження.

Якщо кількість товару обмежена L_k одиницями, то вибір кращого набору кожного наступного гравця так само обмежений товарами, присутніми на ринку. З чого випливає обернена залежність між наборами U_i, адже чим більше корисність набору одного гравця, тим менша корисність набору іншого гравця. Запишемо наступну приведену корисність кожного гравця через взаємовідношення його корисності до сукупної корисності гравців:

$$\breve{U}_i = \frac{U_i}{\sum_{h=1}^{N} U_h}, h \ne i,$$

за стратегії ω^i при стратегіях ω^j, $j \in [1,N] \setminus \{i\}$, $i \in [1,N]$.

Для отримання конкретних результатів розглянуто ситуацію з трьома гравцями, а також обрано такі вихідні параметри, які задані в табл. 1. У цьому випадку непрямі обмеження виконуються.

Другим етапом обрано інші значення параметрів, за яких гравці мають різні коефіцієнти, доходи та ін. (табл. 2). У цьому випадку непрямі обмеження можуть не виконуватися, тобто економічні агенти не мають можливості купити ту кількість благ, яку б вони хотіли, що призводить до певних змін в їхній поведінці.

Випадок часткової інформованості гравців. Нехай кожен гравець i знає функції виграшу U_i всіх інших гравців, але вектори параметрів йому невідомі. Така інформованість природна, оскільки перевага кожного гравця на безлічі функцій виграшу інших гравців, як правило, являє собою конфіденційну інформацію.

Таблиця 1

Елементи системи для першого випадку

Параметр	Гравець 1			Гравець 2			Гравець 3		
μ_k^i	1	2	3	1	2	3	1	2	3
p_k	1	2	3	1	2	3	1	2	3
a_k^i	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b_k^i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
L_k	10			10			10		
$\gamma_{i\,min}$	16			16			16		
$\gamma_{i\,max}$	20			20			20		

Таблиця 2

Елементи системи для другого випадку

Параметр	Гравець 1			Гравець 2			Гравець 3		
μ_k^i	3	1	2	2	1	3	1	3	2
p_k	10	20	25	10	20	25	10	20	25
a_k^i	0	1	1	1	1	2	1	4	1
b_k^i	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,015	0,01	0,005	0,01
L_k	12			12			12		
$\gamma_{i\,min}$	150			200			150		
$\gamma_{i\,max}$	300			300			250		

Крім того, ця перевага може не завжди повністю усвідомлюватися гравцем і змінюватися (уточнюватися) в процесі прийняття рішення. Для реалізації процедури пошуку індивідуально-оптимальної рівноваги гри в умовах часткової інформованості гравців необхідно вирішувати систему нерівностей так, щоб кожен гравець оперував лише тією інформацією, яка йому відома. Найбільш універсальною схемою, яку можна застосувати в умовах часткової інформованості гравців, є так звана процедура «нащупування Курно» [1].

Таким чином, кожен гравець i оперує лише відомою йому інформацією (функції виграшу всіх гравців і вектор параметрів, який характеризує його власну перевагу на безлічі функцій виграшу інших гравців).

Якщо процедура «нащупування Курно» збігається, то ми отримаємо деякий індивідуально-оптимальний баланс, який відповідає набору переваг всіх гравців. Така процедура може і не збігатися. Недоліком процедури «нащупування Курно» є також низька швидкість збіжності, яка в загальному випадку не піддається оцінюванню.

У зв'язку з малою вірогідністю і низькою швидкістю збіжності, в [4] запропоновано інші методи пошуку індивідуально-оптимальних рівноваг, які базовані на розподілених методах розв'язання оптимізаційних задач.

Загальна схема розподіленого розв'язання оптимізаційних задач ґрунтується на визначенні так званої функції неузгодженості [3]. Ця функція може визначатися різними способами, але має бути кількісною оцінкою, що характеризує неузгодженість рішень, які обрані окремими гравцями, за їх належністю до розв'язання всієї задачі в цілому. Загальна ідея побудови розподіленого розв'язання систем взаємопов'язаних задач полягає в покроковому узгодженні їх розв'язків з метою забезпечити отримання наступного наближення до розв'язання завдання, з меншою величиною функції неузгодженості, ніж на попередньому кроці. Збіжність таких процедур забезпечується корекцією моделей задач на кожному кроці.

Для цього запишемо такі рівняння, розподіливши змінні за кожним гравцем окремо:

$$\omega^i = \frac{1}{N}\sum_{j\in N}\omega^j.$$

Тут кожному гравцю ii відповідають вектори розподілених змінних $\omega^i = \omega^i_j$. Побудуємо допоміжну задачу з квадратичною цільовою функцією неузгодженості, розв'язання якої буде збігатися:

$$g(\omega) = \sum_{i\in N}\left\|\omega^i - \frac{1}{N}\sum_{j\in N}\omega^j\right\|^2 \to min.$$

Для розв'язання цієї допоміжної задачі використовуємо ітераційний метод спуску, в якому будемо обирати допустимі напрями спуску з використанням лінійної апроксимації цільової функції за векторами змінних ω^i.

Візьмемо початкове наближення ω^0. Підставивши k-те наближення, після чого, відкинувши константи і постійні множники, будемо шукати напрям спуску на $(k+1)$-му кроці шляхом розв'язання наступних задач:

$$\sum_{i\in N}\left(\omega^{i(k)} - \frac{1}{N}\sum_{j\in N}\omega^{j(k)}, w^i\right) \to \min\cdot$$

Ці задачі, у свою чергу, декомпозуються на n незалежних підзадач:

$$\left(\omega^{i(k)} - \frac{1}{N}\sum_{j\in N}\omega^{j(k)}, \omega^i\right) \to \min$$

Наступне $(k+1)$-те наближення визначається з умов зменшення функції вздовж допустимого напряму таким чином:

$$\omega^{i(k+1)} = \omega^{i(k)} + \lambda^{(k)}\left(\overline{\omega}^{i(k+1)} - \omega^{i(k)}\right),$$

де $\lambda^{(k)}$ перебуває з умов найбільшого зменшення значення функції неузгодженості:

$$\lambda^{(k)} = \arg\min_{\lambda\epsilon[0,1]} g(\omega^{(k)} - \lambda(\omega^{(k)} - \overline{\omega}^{(k)}))$$

$$= \sum\nolimits_{i\in N} \left(\omega^{i(k)} - \frac{1}{N}\sum\nolimits_{j\in N}\omega^{j(k)}, \omega^{i(k)} - \overline{\omega}^{i(k+1)}\right) \Big/ \sum\nolimits_{i\in N}\left\|\omega^{i(k)} - \overline{\omega}^{i(k+1)}\right\|^2$$

Таким чином, відповідно до заданих уподобань на безлічі функцій виграшу, гравці пропонують один одному до розгляду ситуації гри. Ці задачі описуються на основі тільки тієї інформації, якою володіє відповідний гравець, тобто інформацією про функції його виграшу і ситуації гри, яка спостерігається усіма гравцями разом.

Вирішимо задачу із застосуванням описаного вище методу (табл. 3–4).

У першому випадку за рівних умов гравці, знаючи виграші, погодяться на рівний виграш кожного. За цих умов значення функції корисності збігається з рівновагою за Парето, оскільки гравці не є конкуруючими та їх узгодженість досягає одиниці.

Нагадаємо, що у другому випадку кількість товарів на ринку обмежена, що призводить до конкуренції вибору. При оптимальності за Парето ми отримали значення функції корисності 1,529 – це ідеально можливий варіант для усіх гравців, за Нешем – 1,523, за повної некооперації гравців. Завдяки зменшенню функції неузгодженості, вони досягнуть кращих результатів 1,525, ніж при рівновазі за Нешем, наближених до результатів за Парето.

Висновки з дослідження і перспективи в цьому напрямі. У роботі розглянуто методи некооперативної теорії гри на прикладі неокласичної моделі рівноваги товарів на обмеженому ринку між фіксованою кількістю економічних агентів, описано методи «нащупування Курно» та принцип індивідуальної оптимальності, продемонстровано різницю між концепціями: концепція оптимальності за Парето, базована на ідеї кооперативної поведінки гравців, коли вони колективно обирають свої стратегії і спільно враховують функції виграшу. Концепція рівноваги за Нешем ґрунтується на ідеї некооперативної поведінки гравців, коли вони індивідуально обирають свої стратегії і кожен враховує лише свою функцію виграшу. Концепція індивідуальної оптимальності полягає у виборі гравцями своїх стратегій так, щоб склалася найкраща ситуація для всіх гравців. Оскільки такі ситуації можуть не існувати, то гравці можуть погодитися на компроміс заради спільної мети. Розв'язано задачу за допомогою принципу індивідуальної оптимальності

Таблиця 3

Розв'язання за стратегією індивідуально-оптимальних рівноваг

$\breve{U}_1 =$	$\breve{U}_2 =$	$\breve{U}_3 =$	$\sum_{i=1}^{N}\breve{U}_i =$
0,5	0,5	0,5	1,5

Таблиця 4

Розв'язання за стратегією індивідуально-оптимальних рівноваг другого випадку

$\breve{U}_1 =$	$\breve{U}_2 =$	$\breve{U}_3 =$	$\sum_{i=1}^{N}\breve{U}_i =$
0,493	0,652	0,380	1,525

та порівняно результати з розв'язанням цієї ж задачі у двох інших випадках. Так, результати розв'язання за індивідуальної оптимальності перевищують результати розв'язання за рівновагою за Нешем. Таким чином, економічні агенти, діючи не за власними інтересами, а за спільними, що суперечить класичним методам оптимальності, досягли кращих індивідуальних результатів. Це можна винести в економічний парадокс: діючи за мотивом кращого індивідуального результату (рівновага за Нешем) економічні агенти досягають гірших індивідуальних результатів, ніж діючи за спільними інтересами (індивідуальна оптимальність).

Список використаної літератури

1. Мулен Э. *Теория игр* с примерами из математической экономики / Э. Мулен. – М.: Мир, 1985. – 200 с.

2. Мащенко С.О. Дослідження стабільності рівноваги на основі принципу індивідуальної оптимальності / С.О. Мащенко // Кібернетика і системний аналіз. – 2007. – № 4. – С. 162–169.

3. Волкович В.Л. Алгоритми пошуку допустимого рішення в лінійних розподілених системах / В.Л. Волкович, Г.В. Коленов, С.О. Мащенко // Автоматика. – 1988. – № 4. – С. 70–77.

4. Мащенко С.О. Пошук індивідуально-оптимальних рівноваг в умовах часткової інформованості гравців / С.О. Мащенко // Knowledge – Dialogue – Solution ITHEA SOFIA 2009 Supplement to International Journal «Information Technologies and Knowledge». – 2009. – № 3. – P. 180–188.